Université de Rouen
L2 Math/Info
Année 2012-2013

Algèbre
Examen du 25 juin 2013, durée 2h

L'usage de tout dispositif électronique autre que la montre est interdit.
Il en est de même de tout document.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Exercice 1. Soient σ_1 et σ_2 les permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 5 & 9 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Décomposer σ_1, σ_2 et $\sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ en produit de cycles à supports disjoints. Calculer alors leurs signatures.

(b) Calculer σ_2^{2007} ainsi que $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}$.

(c) Trouver toutes les permutations σ de $\mathcal{S}_9$ vérifiant $\sigma_1 \circ \sigma = \sigma_2$.

(d) Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de permutation σ telle que $\sigma^2 = \sigma_1$. Pour cela soit σ une permutation telle que $\sigma^2 = \sigma_1$.

-i- Soient $i = \sigma(3)$ et $j = \sigma(6)$. Que valent $\sigma(i)$ et $\sigma(j)$?

-ii- Peut-on avoir $i, j \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$? [justifier]

-iii- Conclure.

(e) Trouver au moins une permutation σ telle que $\sigma^2 = \sigma_2$. Pour cela on pourra remarquer –et démontrer– que si s est un cycle de longueur $2p + 1$ (avec $p \geq 2$) alors $s^{p+1} \circ s^{p+1} = s$.

(f) Soit $\tau = (1\,2) \circ (3\,4)$. Trouver σ tel que $\sigma^2 = \tau$.

Exercice 2.

(a) Trouver le couple (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + 1$ divise $aX^3 + bX^2 - X + 1$.

(b) Peut-on trouver un couple (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(X^2 + 1)^2$ divise $aX^3 + bX^2 - X + 1$?

Exercice 3. Dans ce qui suit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\overline{x}$ la classe de x dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(a) Trouver au moins un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $7u + 23v = 1$. [donner les détails]

(b) Montrer que $\overline{23}$ est inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Quel est son inverse ?

(c) Calculer l'ordre de $\overline{23}$ dans le groupe multiplicatif $\big((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times\big)$?

Exercice 4. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire. On appelle le nilradical de A, noté $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble défini par

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ x \in A \text{ tel qu'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } x^n = 0 \right\}.$$

(a) Démontrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A.

(b) Dans le cas où $A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ déterminer $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

(c) Dans le cas où $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ déterminer $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

[question bonus] Dans le cas où $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \geq 2$ à quelle condition sur p, $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est-il réduit à $\{0\}$?