

Exercice 1. [une équation hyperbolique] On considère l'équation de Tricomi

$$(1) \quad u_{xx} + xu_{yy} = 0 \quad x < 0$$

- (a) Quel est le type de l'équation? Quelle la forme standard attendue?
 (b) Le but est de trouver le système de coordonnées $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ dans lequel l'équation (??) est sous sa forme standard.

-i- Montrer que ξ et η sont solutions de

$$\xi_x^2 + x\xi_y^2 = 0, \quad \eta_x^2 + x\eta_y^2 = 0.$$

-ii- En utilisant le fait que $x < 0$, en déduire (il faut deux solutions indépendantes) que ξ et η sont solutions de

$$\xi_x + \sqrt{-x}\xi_y = 0, \quad \eta_x - \sqrt{-x}\eta_y = 0.$$

-iii- En déduire, (en écrivant par exemple dy/dx) les équations cartésiennes des caractéristiques et qu'une solution est

$$\xi(x, y) = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta(x, y) = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}$$

-iv- Vérifier que (ξ, η) est bien un changement de coordonnées.

-v- Calculer la forme canonique de l'équation (??) dans le système de coordonnées (ξ, η) .

Exercice 2. [une équation parabolique] On considère l'équation

$$(2) \quad x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad x > 0$$

- (a) Quel est le type de l'équation? Quelle la forme standard attendue?
 (b) Le but est de trouver le système de coordonnées $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ dans lequel l'équation (??) est sous sa forme standard.

-i- Montrer que l'on cherche η telle que

$$x^2 \eta_x - xy \eta_y = 0.$$

-ii- Calculer les équations cartésiennes des caractéristiques (écrire dy/dx par exemple) et en déduire que $\eta(x, y) = xy$ est une solution.

-iii- Vérifier que si $\xi(x, y) = x$ alors (ξ, η) définit bien un changement de coordonnées (calculer le déterminant de la matrice jacobienne)

-iv- Écrire l'équation (??) dans le système de coordonnées (ξ, η) et aboutir à

$$(3) \quad \xi^2 v_{\xi\xi} + \xi v_{\xi} = 0.$$

- (c) Intégrer (??) et en déduire la solution $u(x, y)$ (faire le changement de coordonnées de (ξ, η) en (x, y)).

Exercice 3. [une équation elliptique] On considère l'équation de Tricomi

$$(4) \quad u_{xx} + xu_{yy} = 0 \quad x > 0$$

- (a) Quel est le type de l'équation? Quelle la forme standard attendue?
 (b) Le but est de trouver le système de coordonnées $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ dans lequel l'équation (??) est sous sa forme standard. À l'aide du cours et des deux exemples précédents, aboutir à $\xi(x, y) = \frac{3/2}{y}$ et $\eta(x, y) = -(x)^{3/2}$.

(c) Montrer que l'équation (??) s'écrit dans le système de coordonnées (ξ, η)

$$\frac{9}{4}(v_{xx} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3r}v_{\eta}) = 0.$$

Exercice 4. Pour chacune des équations suivantes, déterminer la classe, la forme standard, si possible la solution générale et éventuellement la solution satisfaisant les conditions données.

$$(1) 4u_{xx} + 3u_{xt} - u_{tt} = 0 \quad \text{et} \quad u(x, 0) = x^2 \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

$$(2) u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos x)^2 u_{yy} - (\cos x)u_y = 0$$

$$(3) (x^2 u_x)_x - y^2 u_{yy} = 0 \quad x > 0 \text{ et } y > 0$$

$$(4) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(5) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(6) x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad x > 0 \text{ et } y > 0$$

$$(7) x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4y^2 \quad x > 0$$

$$(8) 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(9) u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} = 0 \quad \text{avec } r > 0 \text{ et } \phi \in [0, 2\pi]$$

$$(10) u_{xx} + (1+y^2)^2 u_{yy} + 2y(1+y^2)u_y = 0$$