TP 1 : (Re)prise en main de Scilab – algèbre linéaire

1. Démarrage

Scilab est un logiciel de calcul numérique (comme Matlab, mais contrairement à Maple ou Xcas, par exemple, qui sont des logiciels de calcul formel ou symbolique) : par exemple, Scilab peut calculer

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

mais pas

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ -4 & b \end{pmatrix}$$

(alors que ce n'est pas si compliqué...).

Scilab est un logiciel libre (comme Xcas, contrairement à Matlab et Maple...), développé à l'Inria, en France.

Scilab peut être téléchargé sur le site www.scilab.org. Ces dernières années, les concepteurs de Scilab ont aussi développé un module Scilab pour les lycées [1], que nous n'utiliserons pas par défaut dans le cadre de ce cours, mais qui peut être utile dans vos futures classes.

Vous pourrez utiliser le document Scilab comme une introduction. D'autres sont disponibles sur Internet, à vous de les trouver.

Lorsqu'on lance Scilab, la première fenêtre qui s'ouvre est la **Console** : on peut l'utiliser pour faire des calculs directement, comme sur une calculatrice. Il est néanmoins indispensable de prendre l'habitude d'utiliser aussi l'**Éditeur de texte**, qui permet de taper des scripts ou des fonctions (suites d'opérations ou de commandes), et de les sauvegarder. L'utilisation du **Navigateur d'aide** est elle aussi fortement recommandée.

2. Manipulation sur les vecteurs et les matrices

Les matrices sont les objets de base de Scilab : tout calcul, toute fonction, peut s'appliquer aux matrices. Il est donc très utile de bien savoir créer et manipuler des matrices. En général, il est plus efficace (à cause de la conception même de Scilab) de programmer à l'aide de matrices plutôt que de faire des boucles.

Échauffement. Tester les commandes suivantes :

```
-->A=[1 5 8 ; 2 3 -2 ; 3 -2 4];
-->A=[1 5 8 ; 2 3 -2 ; 3 -2 4]
-->A(1,1)
-->A(4,3)
-->A(:,2)
-->A(3,:)
-->A(1:2,:)
-->B=A'
-->x=[0 : 0.5 : 3]
-->y=2^x
```

1. http ://www.scilab.org/fr/education/lycee

```
-->z=exp(x)
-->x^2
-->x.^2
-->A^2
-->A.^2
```

Que fait la commande `s=ones(x)*x'` ? Comment calculer le produit scalaire de deux vecteurs x et y ?
Expliquer la commande suivante :

```
-->x=[-2 : .5 : 2] ; l=(x>-1 & x<1) ; x(l)=3 ; x
```

Pour les exercices suivants, essayer de ne pas utiliser de boucle `for`, sauf indication contraire.

Exercice 1 (Écriture de vecteurs et de matrices)**.**

a) Écrire les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (5,9,2,-4,6)\,,\quad v_2 = (2,2.6,\ldots,\underbrace{2+0.6\cdot k}_{k^{\text{ème}}\text{ terme}},\ldots,17)\,,\quad v_3 = \underbrace{(2\pi,2\pi,\ldots,2\pi,2\pi)}_{100\text{ termes}}\,.$$

b) Écrire les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 50 \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & 54 \\ 9 & 10 & 11 & \cdots & 58 \end{pmatrix}\,,\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 100 \end{pmatrix}\,,\quad C = \left((-1)^{i+j}\right)_{1\le i,j\le 6}\,.$$

c) Écrire un script avec une boucle `for` permettant d'écrire v_2, v_3, A, B et C.

Exercice 2 (Manipulation de vecteurs)**.** On définit le vecteur X par `X=[1:0.01:10]`.

a) Mettre dans une variable n la taille du vecteur X.

b) Afficher à l'écran la valeur du troisième élément de X.

c) Créer un vecteur Y qui contient tous les éléments de X en sens inverse.

d) Échanger le cinquième et le septième élément de X.

Exercice 3 (Résolution d'un exercice avec Scilab)**.** On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\,,\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Les questions qui suivent seront à traiter au maximum à l'aide de Scilab.

a) Calculer J^2 et vérifier que l'on a $AJ = JA$. Que vaut J^{-1} ?

b) Montrer que $(A+2I_4+3J)^2 = 4(A+2I_4+3J)$ et que $A(A+6J) = -5I_4$ (où I_4 est la matrice identité 4×4). En déduire que A est inversible et donner explicitement A^{-1} .

c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) Pouvez-vous trouver une expression de A^n ?

3. PREMIÈRES FONCTIONS

Exercice 4 (Calcul de la factorielle)**.**

a) Écrire trois fonctions correspondant à des méthodes différentes pour calculer la factorielle d'un nombre entier n.

b) Comparer les temps de calculs à l'aide de la commande `timer`.

Exercice 5 (Calculs de sommes)**.** Une matrice A étant donnée, écrire une fonction pour trouver les sommes de chacune des colonnes de A en utilisant la commande `for` dans un premier temps, la fonction `sum` dans un second temps.
Comparer le temps d'exécution de chaque méthode.

Exercice 6 (Opérations matricielles)**.**

a) Écrire une fonction qui prend en entrée deux matrices A et B et qui calcule (quand cela est possible) leur somme et leur différence. On prendra soin de tester à l'intérieur de la fonction si les calculs sont possibles.

b) Soit A et B deux matrices de tailles respectives $n \times m$ et $m \times p$. On pose $C = A \cdot B$.

(i) Rappeler l'expression de $C_{i,j}$ l'élément de la ligne i et de la colonne j de C.

(ii) Écrire une fonction qui calcule le produit de deux matrices préalablement saisies : on utilisera dans un premier temps des boucles `for` (et aucune fonctionnalité propre à Scilab) puis le signe * de Scilab.

(iii) Comparer le temps d'exécution de chaque méthode.

Exercice 7. Écrire les fonctions suivantes, sans utiliser de boucle. Toutes prennent en entrée un vecteur colonne $v = (v_i)$ et un vecteur ligne $w = (w_j)$ et retournent en sortie une matrice $A = (a_{i,j})$ qui a autant de lignes que v et autant de colonnes que w. Seules les expressions des coefficients $a_{i,j}$ diffèrent/

(i) `produit` : $a_{i,j} = v_i \cdot w_j$.

(ii) `somme` : $a_{i,j} = v_i + w_j$.

(iii) `quotient` : $a_{i,j} = \frac{v_i}{w_j}$.

(iv) `echiquier` : $a_{i,j} = v_i$ si $i + j$ est pair, w_j sinon.

Exercice 8 (Matrices particulières)**.** On se propose d'écrire des fonctions renvoyant des matrices avec certaines propriétés. Dans tous les cas sauf le premier, les coefficients des matrices seront tirés au hasard uniformément dans l'intervalle $[0,1]$ à l'aide de la fonction `rand`.

(i) `Hilb(m,n)` : renvoie la matrice dite de Hilbert de taille $m \times n$ définie par ses coefficients $H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$.

(ii) `Hasard(m,n)` : renvoie une matrice quelconque de taille $m \times n$.

(iii) `Reg(n)` : renvoie une matrice inversible de taille $n \times n$.

(iv) `RegI(n)` : renvoie une matrice triangulaire inférieure inversible de taille $n \times n$.

(v) `RegS(n)` : renvoie une matrice triangulaire supérieure inversible de taille $n \times n$.

(vi) `Sym(n)` : renvoie une matrice symétrique de taille $n \times n$.

(vii) `Toep(n)` : renvoie une matrice de Toeplitz (constante sur les « diagonales ») de taille $n \times n$.