

L'USAGE DE TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE AUTRE QUE LA MONTRE EST INTERDIT.
IL EN EST DE MÊME DE TOUT DOCUMENT.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Exercice 1. On rappelle que $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ désigne l'espace vectoriel des suites réelles convergentes vers 0. Pour tout élément $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on définit la norme (usuelle) infinie : $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$.

- (a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur c_0 .
- (b) Montrer que c_0 muni que $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Soit $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{2^{n+1}}, \quad \forall x \in c_0.$$

- (c) Montrer que φ est une forme linéaire continue.
- (d) Montrer que $\|\varphi\|$ (la norme de l'application linéaire continue φ) vaut 1.
- (e) Montrer qu'il n'existe pas $x \in c_0$ tel que $x \neq 0$ et $\varphi(x) = \|x\|_\infty$.

Exercice 2. Soit E un Banach. On considère une famille finie $f_1, \dots, f_n$ d'éléments du dual topologique E' . Le but est de montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) il n'existe pas $x \in E$ tel que $\langle f_i, x \rangle_{E', E} < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (2) la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est positivement linéairement dépendante, c'est-à-dire il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls, vérifiant $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$.

La preuve de ce résultat se décompose en deux questions indépendantes.

- (a) Montrer que (2) implique (1).
- (b) On suppose que la propriété (1) est vérifiée. Considérons les deux ensembles

$$C_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \quad y_i < 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\},$$

$$C_2 = \left\{ \left(\langle f_1, x \rangle_{E', E}, \dots, \langle f_n, x \rangle_{E', E} \right), \quad x \in E \right\}.$$

- i- Montrer que C_1 et C_2 sont deux convexes ouverts et disjoints de $\mathbb{R}^n$.
- ii- En appliquant un théorème de séparation (que l'on énoncera avec soin) montrer que (2) est vérifié.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$ on définit sur $]0, 1[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x}$.

- (a) Montrer que f_n converge presque partout vers 0.
- (b) Calculer $\|f_n\|_{L^2([0,1])}$ en fonction de n . En déduire que f_n ne converge pas fortement dans $L^2([0,1])$.
- (c) Soit g une fonction $\mathcal{C}^1([0,1])$ et à support compact. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) g(t) dt = 0.$$

- (d) Déduire de la question précédente que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,1])$.