Université de Rouen
Master 1 MFA
Année 2013-2014

Analyse Fonctionnelle
Examen (seconde session) du 25 juin 2014, durée 2h

L'USAGE DE TOUT DISPOSITIF ÉLECTRONIQUE AUTRE QUE LA MONTRE (ET ENCORE) EST INTERDIT.
IL EN EST DE MÊME DE TOUT DOCUMENT.

Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Question de cours : Énoncer le théorème de l'application ouverte.

Exercice 1. [Banach-Steinhaus et les formules de quadratures] On se place dans l'espace de Banach $(\mathscr{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme usuelle $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{n-1}^{(n)} < t_n^{(n)} = 1$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ et soient $\alpha_0^{(n)}, \alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)}$ $n+1$ réels non nuls.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit T_n par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1]), \quad T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f(t_k^{(n)})$$

et on suppose que pour tout polynôme Q

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(Q) = \int_0^1 Q(x)\,dx.$$

(a) L'entier n étant fixé, montrer que T_n est une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $\|T_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$.

(b) Avec un choix judicieux d'une fonction f établir que $\|T_n\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}|$. *[Indication : faire un dessin d'une fonction bien choisie et affine par morceaux]*

(c) En utilisant la densité des polynômes dans $\mathscr{C}^0([0,1])$, montrer que si

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k^{(n)}| < +\infty \tag{1}$$

alors

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1]) \quad \lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{2}$$

(d) Démontrer la réciproque, c'est-à-dire « (2) implique (1) ». *[Indication : énoncer et utiliser un théorème du cours]*

(e) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leq k > n$ on a $\alpha_k^{(n)} > 0$. Montrer que (2) est vérifiée.

Exercice 2. Le but de l'exercice est de « construire » un espace vectoriel normé de dimension infinie, de le munir de deux normes non équivalentes mais qui font de cet evn un Banach.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un Banach de dimension infinie et soit φ une forme linéaire sur E. On considère l'espace vectoriel produit $E \times \mathbb{R}$, dont les éléments seront notés (x, λ) $(x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R})$ et on définit sur $E \times \mathbb{R}$ deux normes N_1 et N_2 :

$$N_1((x,\lambda)) = \|x\|_E + |\lambda|, \qquad N_2((x,\lambda)) = \|x\|_E + |\lambda - \varphi(x)|.$$

(a) Montrer que N_1 est une norme sur $E \times \mathbb{R}$ et que $(E \times \mathbb{R}, N_1)$ est un Banach.

(b) Montrer que N_2 est une norme sur $E \times \mathbb{R}$.

(c) Que φ soit continue ou non il est possible de montrer que $(E \times \mathbb{R}, N_2)$ est un Banach.
  -i- On suppose φ continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$. Montrer que $(E \times \mathbb{R}, N_2)$ est un Banach.
  -ii- On suppose que φ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$. Montrer que $(E \times \mathbb{R}, N_2)$ est un Banach. *[Indication : si (x_n, λ_n) est de Cauchy dans $(E \times \mathbb{R}, N_2)$ on ne cherchera pas à montrer que λ_n converge dans $\mathbb{R}$]*

(d) Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si φ est continue. *[Indication : pour la réciproque énoncer et utiliser un théorème du cours]*

(e) En supposant qu'il existe une forme linéaire non continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$ conclure.