

**Exercice 1.** [●]

Effectuer la division euclidienne de  $a$  par  $b$  dans chacun des cas suivants :

- (1)  $a = 254$  et  $b = 12$
- (2)  $a = -254$  et  $b = 12$
- (3)  $a = 254$  et  $b = -12$
- (4)  $a = -254$  et  $b = -12$

**Exercice 2.** [●]

- (1) Soient  $a \neq 1$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls. Montrer que  $a - 1$  divise  $a^n - 1$ .
- (2) Déterminer tous les entiers naturels  $n$  tels que  $n + 1$  divise  $n^2 + 1$ .

**Exercice 3.** [●]

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls et  $p$  un nombre premier qui divise le produit  $ab$ . Montrer que  $p$  divise l'un des entiers  $a$  et  $b$ .

En déduire que si un nombre premier divise un produit de nombres premiers, il est égal à l'un d'eux.

**Exercice 4.**

Montrer que 3571 est un nombre premier.

**Exercice 5.**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers naturels non nuls.

- (1) Montrer le théorème de Gauss : si  $a$  divise  $bc$  et si  $a$  est premier avec  $b$  alors  $a$  divise  $c$ .
- (2) Montrer que : si  $a$  est premier avec  $b$  et  $c$  alors  $a$  est premier avec  $bc$ .
- (3) Montrer que : si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux et divisent  $c$  alors  $ab$  divise  $c$ .
- (4) Montrer que : si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux alors  $a + b$  et  $ab$  sont premiers entre eux.

**Exercice 6.** [●]

Soit  $a$  et  $n$  deux entiers tels que  $a \geq 2$  et  $n \geq 2$ .

Montrer que si  $a^n - 1$  est premier alors  $a = 2$  et  $n$  est premier.

**Exercice 7.** [●]

Soient  $a$  un entier naturel non nul et  $p$  un nombre premier.

- (1) Soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq p - 1$ . Montrer que  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .
- (2) En déduire par récurrence sur  $a$  que  $p$  divise  $a^p - a$ .

**Exercice 8.** [●]

Soit  $a = da'$  et  $b = db'$ . Montrer que :  $d = \text{PGCD}(a, b) \Leftrightarrow 1 = \text{PGCD}(a', b')$ .

**Exercice 9.**

Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  :  $x + y = 187$  et  $\text{PPCM}(x, y) = 30\text{PGCD}(x, y)$ .

**Exercice 10.** [●]

Calculer le PGCD de 21560 et 27300. Écrire l'égalité de Bezout correspondante.

**Exercice 11.**

En raisonnant par récurrence, établir les propriétés suivantes pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) 6 divise  $5n^3 + n$ . [●]
- (2) 9 divise  $4^n - 1 - 3n$ .
- (3) 16 divise  $5^n - 1 - 4n$ .

**Exercice 12.**

En utilisant les congruences, établir les propriétés suivantes pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) 5 divise  $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ . [•]
- (2) 7 divise  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ .
- (3) 11 divise  $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ .

**Exercice 13.**

Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , le nombre  $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$  est divisible par 3804.

**Exercice 14.**

- (1) Calculer le PGCD de  $(3^{123} - 5)$  et de 25. [•]
- (2) Calculer le PGCD de  $(2^{443} + 7)$  et de 15.

**Exercice 15.**

- (1) Montrer que si  $n$  est un entier impair, alors  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .
- (2) Montrer que si  $n$  est un entier pair, alors  $n^2 \equiv 0 \pmod{8}$ , ou  $n^2 \equiv 4 \pmod{8}$ .
- (3) Prouver que la somme  $a^2 + b^2 + c^2$  des carrés des trois entiers impairs  $a$ ,  $b$  et  $c$  et ne peut pas être le carré d'un entier.

**Exercice 16.**

Déterminer tous les couples d'entiers  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant les équations suivantes.

- (1)  $xy = 2x + 3y$ . [•]
- (2)  $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$ .
- (3)  $2x^3 + xy - 7 = 0$ .

**Exercice 17. (Contrôle continu 1 année 2013-2014)**

- (1) Quel est le reste de la division euclidienne de  $3^{1000}$  par 7 ?
- (2) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^n$  est premier avec 7.
- (3) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7.

Pour tout entier naturel non nul  $n$  on pose  $s_n = 1 + 3 + \dots + 3^{n-1}$ .

- (4) Justifier l'égalité  $s_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
- (5) Quelles sont les valeurs de l'entier naturel  $n$  pour lesquelles  $s_n$  est divisible par 7 ?