

Exercice 1. [●]

Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

- (1) $a = 254$ et $b = 12$
- (2) $a = -254$ et $b = 12$
- (3) $a = 254$ et $b = -12$
- (4) $a = -254$ et $b = -12$

Exercice 2. [●]

- (1) Soient $a \neq 1$ et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$.
- (2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 3. [●]

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et p un nombre premier qui divise le produit ab . Montrer que p divise l'un des entiers a et b .

En déduire que si un nombre premier divise un produit de nombres premiers, il est égal à l'un d'eux.

Exercice 4.

Montrer que 3571 est un nombre premier.

Exercice 5.

Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls.

- (1) Montrer le théorème de Gauss : si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c .
- (2) Montrer que : si a est premier avec b et c alors a est premier avec bc .
- (3) Montrer que : si a et b sont premiers entre eux et divisent c alors ab divise c .
- (4) Montrer que : si a et b sont premiers entre eux alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 6. [●]

Soit a et n deux entiers tels que $a \geq 2$ et $n \geq 2$.

Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 7. [●]

Soient a un entier naturel non nul et p un nombre premier.

- (1) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq p - 1$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
- (2) En déduire par récurrence sur a que p divise $a^p - a$.

Exercice 8. [●]

Soit $a = da'$ et $b = db'$. Montrer que : $d = \text{PGCD}(a, b) \Leftrightarrow 1 = \text{PGCD}(a', b')$.

Exercice 9.

Résoudre dans \mathbb{N}^2 : $x + y = 187$ et $\text{PPCM}(x, y) = 30\text{PGCD}(x, y)$.

Exercice 10. [●]

Calculer le PGCD de 21560 et 27300. Écrire l'égalité de Bezout correspondante.

Exercice 11.

En raisonnant par récurrence, établir les propriétés suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- (1) 6 divise $5n^3 + n$. [●]
- (2) 9 divise $4^n - 1 - 3n$.
- (3) 16 divise $5^n - 1 - 4n$.

Exercice 12.

En utilisant les congruences, établir les propriétés suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- (1) 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$. [•]
- (2) 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
- (3) 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

Exercice 13.

Montrer que pour tout entier naturel non nul n , le nombre $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ est divisible par 3804.

Exercice 14.

- (1) Calculer le PGCD de $(3^{123} - 5)$ et de 25. [•]
- (2) Calculer le PGCD de $(2^{443} + 7)$ et de 15.

Exercice 15.

- (1) Montrer que si n est un entier impair, alors $n^2 \equiv 1 [8]$.
- (2) Montrer que si n est un entier pair, alors $n^2 \equiv 0 [8]$, ou $n^2 \equiv 4 [8]$.
- (3) Prouver que la somme $a^2 + b^2 + c^2$ des carrés des trois entiers impairs a , b et c et ne peut pas être le carré d'un entier.

Exercice 16.

Déterminer tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant les équations suivantes.

- (1) $xy = 2x + 3y$. [•]
- (2) $x^2 - y^2 - x + 3y = 30$.
- (3) $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Exercice 17. (Contrôle continu 1 année 2013-2014)

- (1) Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7 ?
- (2) Montrer que pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
- (3) Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

Pour tout entier naturel non nul n on pose $s_n = 1 + 3 + \dots + 3^{n-1}$.

- (4) Justifier l'égalité $s_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$
- (5) Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles s_n est divisible par 7 ?