Correction rapide et manuscrite
du Contrôle Continu - L2 SPS - 13/11/2017

<u>Exercice 1</u>. On calcule $\Delta = (-\sqrt{3})^2 - 4\times 1\times 1 = 3-4 = -1$.
Comme Δ, le discriminant, est strictement négatif, l'équation admet 2 racines complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

<u>Exercice 2</u>. a) $\sqrt{3}+i$ $\quad |\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$. On reconnaît $e^{i\pi/6}$.

$$\sqrt{3}+i = 2\, e^{i\pi/6}$$

b) $1+i$ $\quad |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. On reconnaît $e^{i\pi/4}$

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

c) $$z = \frac{(\sqrt{3}+i)^3}{(1+i)^2} = \frac{(2e^{i\pi/6})^3}{(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^2} = \frac{2^3}{(\sqrt{2})^2}\,\frac{e^{i3\pi/6}}{e^{i\frac{\pi}{4}\times 2}}$$

$$z = 4\,\frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi/2}} = 4$$

d) $z = 4$ est déjà la forme algébrique.

<u>Exercice 3</u> a) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

b) $$\cos(5\theta) = \mathrm{Re}\left(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)\right) \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Re}\left(\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^5\right)$$

A l'aide de la question a)

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5\cos^4\theta(i\sin\theta) + 10\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 + 10\cos^2\theta(i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5$$

$$= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

D'où en prenant la partie réelle

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

<u>Exercice 4.</u> $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x-1)(x-2)}$. C'est une forme indéterminée car $(x-1)(x-2)=0$ pour $x=1$ et $1^3-3\times 1^2-1+3=1-3-1+3=0$.

<u>Technique 1.</u> $x=1+h$ avec $x\to 1 \iff h\to 0$.

$(x-1)(x-2) = (1+h-1)(1+h-2) = h(-1+h)$

$x^3-3x^2-x+3 = (1+h)^3-3(1+h)^2-(1+h)+3$

$= 1+3h+3h^2+h^3-3(1+2h+h^2)-1-h+3$

$= 1+3h+3h^2+h^3-3-6h-3h^2-1-h+3$

$= 1-3-1+3+h(3-6-1)+h^2(3-3)+h^3$

$= 0-4h+h^3$

Donc $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{-4h+h^3}{h(-1+h)} = \dfrac{h(-4+h^2)}{h(-1+h)} \xrightarrow[h\to 0]{} \dfrac{-4}{-1}=4$

<u>Technique 2.</u> on factorise x^3-3x^2-x+3 par $x-1$.

$x^3-3x^2-x+3 = (x-1)(x^2-2x-3)$

D'où $\forall x\neq 1$, $\neq 2$ $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)(x-2)}$

$= \dfrac{x^2-2x-3}{x-2} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1^2-2\times 1-3}{1-2}$

$= \dfrac{-4}{-1}=4$

$\dfrac{xe^{-10x}+2e^{2x}+x^5}{x^{2017}+\cos^2(x)+8e^{2x}} = \cancel{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}}\ \dfrac{xe^{-12x}+2+x^5e^{-2x}}{x^{2017}e^{-2x}+\cos^2(x)e^{-2x}+8}$

Croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5e^{-2x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2017}e^{-2x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-12x}=0$ $\quad |\cos^2(x)e^{-2x}|\leq e^{-2x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos^2x\,e^{-2x}=0$

Conclusion: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-12x}+2+x^5e^{-2x}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2017}e^{-2x}+\cos^2x\,e^{-2x}+8=8$

D'où limite cherchée $=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

<u>Exercice 5</u> $\left(\cos\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times \left(-\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)$

$$\left(\frac{\ln x + x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}+2x\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\left(\ln x + x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{1+2x^2}{x\sqrt{x^2+1}} - \frac{x\left(\ln x + x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

<u>Exercice 6</u>. a) C'est une forme indéterminée car pour $x=0$, $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}=0$.
Suivant l'indication $\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{x^2+1-(1-x^2)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \dfrac{2x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}\right)}$

d'où $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$. On en déduit alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) La fonction $x \to \sqrt{x}$ étant dérivable sur $]0,+\infty[$, f sera dérivable sur $x \in]0,1]$ vérifiant $1+x^2 \neq 0$ et $1-x^2 \neq 0$, ce qui exclut $1=x$.
f dérivable sur $]0,1[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right) + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

c) En factorisant l'expression de $f'(x)$ par $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-x^2}}$ on trouve

$$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-x^2}}\left(-(1+x^2)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\sqrt{1+x^2} + x^2\sqrt{1-x^2} + x^2\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right).$$

d) $\forall x \in]0,1[$ $x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1-x^2} > 0$ d'où le résultat

e) $\forall x \in]0,1[$ $x^2 > -x^2$ ($x^2 > 0 > -x^2$) d'où $1+x^2 > 1-x^2 > 0$. La fonction $x \to \sqrt{x}$ étant ↗, on obtient $\forall x \in]0,1[$ $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{1-x^2}$, d'où $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} > 0$.

x	0		1
f'	‖	$+$	‖
f	‖ 0	↗	$f(1)=\sqrt{2}$ ‖

f) $f'(x) > 0$ sur $]0,1[$ f est donc strictement croissante sur $]0,1[$. f étant bien définie en 1, f est strictement croissante sur $]0,1]$.
Elle établit une bijection entre $]0,1]$ et $]0,\sqrt{2}]$.