

L'usage de tout document autre que le formulaire est interdit.
Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.

Exercice 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

Exercice 2.

- (a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\sqrt{3} + i$.
- (b) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $1 + i$.
- (c) À l'aide des deux questions précédentes écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe

$$z = \frac{(\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}.$$

- (d) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe z .

Exercice 3.

- (a) Développer l'expression $(a + b)^5$.
- (b) À l'aide de la formule de Moivre exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 4. Calculer les trois limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{(x-1)(x-2)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \exp(-10x) + 2 \exp(2x) + x^5}{x^{2017} + \cos^2(x) + 8 \exp(2x)}.$$

Exercice 5. Sans se préoccuper des ensembles de définition dériver les fonctions

$$\cos(\sqrt{1+x^2}); \quad \frac{\ln(x) + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Exercice 6. Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}).$$

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. [indication : on pourra utiliser la quantité conjuguée]
- (b) Préciser l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer f' .
- (c) Simplification de f' : montrer que

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1} \sqrt{1 - x^2}} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}).$$

- (d) En déduire que $f'(x)$ est du même signe que $(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2})$.
- (e) En remarquant que pour tout $x \in]0, 1]$, on a $1 + x^2 > 1 - x^2$, déterminer le signe de f' . En déduire le tableau de variation de f .
- (f) Montrer que f est une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle à déterminer.