Exercice 1. [$\bullet$]
On définit une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = \ln(e^x + e^y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Étudier les propriétés de cette loi.

Exercice 2. [$\bullet$]
On définit une loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$ par

$$x * y := 1 + xy \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que la loi $*$ est commutative.
(2) La loi $*$ est-elle associative ?

Exercice 3. [$\bullet$]
Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Démontrer que $\mathcal{P}(X)$ muni de la différence symétrique Δ est un groupe.

Exercice 4. [$\bullet$]
Sur l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, on considère la loi :

$$x * y = x + y - xy \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

(1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne.
(2) Déterminer si $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe.

Exercice 5. [$\bullet$]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$ forment un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Quel est son ordre ?

Exercice 6. [$\bullet$]
Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle *centre* de G et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.
Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.

Exercice 7. [$\bullet$]
Déterminer les sous-groupes du groupe additif $\mathbb{Z}$.

Exercice 8.
Traduire en termes d'homomorphisme de groupes les propriétés traditionnelles suivantes

(1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; [$\bullet$]
(2) $|zz'| = |z||z'|$; [$\bullet$]
(3) $(xy)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$;
(4) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
(5) $\overline{z+u} = \overline{z} + \overline{u}$;
(6) $\det(AB) = \det A \det B$.

Exercice 9. [$\bullet$]

(a) Soit $(G, \cdot) = \left(\left\{e, a, \ldots, a^5\right\}, \cdot\right)$ un groupe cyclique d'ordre 6. Calculer les ordres respectifs de $a, a^2, \ldots, a^5$.

(b) Soit $(G, \cdot) = \left(\left\{e, a, \ldots, a^{n-1}\right\}, \cdot\right)$ un groupe cyclique d'ordre n avec $n \geq 2$. Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On veut montrer que a^k est d'ordre $n/\mathrm{PGCD}(n, k)$.

On pose $d = \mathrm{PGCD}(n, k)$ et on rappelle qu'on peut alors écrire : $n = dn_1$, $k = dk_1$ avec $\mathrm{PGCD}(n_1, k_1) = 1$.

-i- Calculer $\left(a^k\right)^{n_1}$.

-ii- Montrer que si $h \in \mathbb{N}^*$ vérifie $\left(a^k\right)^h = e$, alors n_1 divise h. Conclure.

Exercice 10. [•]

Soit le groupe $G = (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

(a) Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$, et déterminer son ordre.

(b) Caractériser les générateurs de G.

(c) Quel est l'ordre de l'élément $\overline{9}$?

Exercice 11.

Étudier les structures de groupes d'ordre inférieur ou égal à 5. Pour chaque structure, donner au moins un exemple.

Exercice 12. [•]

Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +)$.

(a) Montrer que f est caractérisé par $f\left(\overline{1}\right)$.

(b) Déterminer les ordres possibles de $f\left(\overline{1}\right)$.

(c) En déduire la liste des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 13.

(a) Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer l'équivalence de :

-i- G est abélien.

-ii- Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^2 = a^2b^2$.

-iii- Pour tout $a, b \in G$, on a : $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

-iv- L'application f de G dans G définie par $f(x) = x^{-1}$ est un automorphisme.

(b) En déduire que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

Exercices supplémentaires

Exercice 14.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Montrer que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Exercice 15.

Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. On appelle *translation à droite* (resp. *à gauche*) par $a \in E$, l'application d_a (resp. g_a) de E dans E définie par $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

(a) Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.

(b) Réciproquement, si la loi $\star$ de E est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

Exercice 16.

Soit $(G,\star)$ un groupe et soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de $(G,\star)$. Montrer que $G_1 \cup G_2$ est un sous-groupe de $(G,\star)$ si et seulement si on a $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Exercice 17.

Soit $(G,\star)$ un groupe fini, d'élément neutre e. Montrer que pour tout h élément de G, l'ordre de h est égal à $\inf\{n \geq 1\,;\, h^n = e\}$.

Exercice 18. (Contrôle continu 1 année 2013-2014)

(1) Soient $(G,\cdot)$ un groupe et $f\colon (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \to (G,\cdot)$ un morphisme de groupes. Montrer que l'ordre de $f\left(\overline{1}\right)$ divise 12.

(2) Soient $(G_1,+)$ et $(G_2,\cdot)$ deux groupes et $f\colon G_1 \to G_2$ un morphisme de groupes. Soit $x \in G_1$ un élément d'ordre fini. Montrer que l'ordre de $f(x)$ divise l'ordre de x.

Exercice 19. (Contrôle continu 1 année 2013-2014)

Soit $(G,\cdot)$ un groupe (non nécessairement commutatif) et soient A et B deux sous-groupes de G. On note :

$$AB := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\},$$

et similairement,

$$BA := \{b' \cdot a' : a' \in A, b' \in B\}.$$

Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 20. (Contrôle continu 1 année 2014-2015)

Le centre d'un groupe $(G,\cdot)$ est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. On note e l'élément neutre de G.

(1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G,\cdot)$.

(2) Soit $x \in G$. On suppose que x est d'ordre 2. Soit $y \in G$.
   (a) Vérifier que $yxy^{-1} \neq e$.
   (b) Quel est l'ordre de l'élément yxy^{-1} ?

(3) On suppose que G a un unique élément d'ordre 2. Montrer que cet élément est dans le centre de G.

Exercice 21. (Contrôle continu 1 année 2014-2015)

Soient $(G_1,\cdot)$, $(G_2,\cdot)$ deux groupes, et $f\colon G_1 \to G_2$ un homomorphisme de groupes. On note e_1 et e_2 les éléments neutres respectifs des groupes G_1 et G_2.

On rappelle que $\mathrm{Ker} f = \{x \in G_1, \quad f(x) = e_2\}$.

Montrer que f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{e_1\}$.

Exercice 22. (Contrôle continu 1 année 2014-2015)

Soit $(G,\cdot)$ un groupe et soit $a \in G$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f_a : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & axa^{-1}. \end{array}$$

(1) Montrer que f_a est un endomorphisme de G.

(2) Montrer que f_a est bijectif.