Exercice 1. [•]
Effectuer la division euclidienne de a par b dans chacun des cas suivants :

(1) $a = 9467$ et $b = 13$
(2) $a = -9467$ et $b = 13$
(3) $a = 9467$ et $b = -13$
(4) $a = -9467$ et $b = -13$

Exercice 2. [•]

(1) Soient $a \neq 1$ et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que $a - 1$ divise $a^n - 1$.
(2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 3. [•]
Soient a et b deux entiers naturels non nuls et p un nombre premier qui divise le produit ab. Montrer que p divise l'un des entiers a et b.
En déduire que si un nombre premier divise un produit de nombres premiers, il est égal à l'un d'eux.

Exercice 4.
Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.

(1) Montrer le théorème de Gauss : si a divise bc et si a est premier avec b alors a divise c.
(2) Montrer que : si a et b sont premiers entre eux et divisent c alors ab divise c.
(3) Montrer que : si a est premier avec b et c alors a est premier avec bc.
(4) Montrer que : si a et b sont premiers entre eux alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 5. [•]
Soit a et n deux entiers tels que $a \geq 2$ et $n \geq 2$.
Montrer que si $a^n - 1$ est premier alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 6.
En raisonnant par récurrence, établir les propriétés suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(1) 6 divise $5n^3 + n$. [•]
(2) 9 divise $4^n - 1 - 3n$.
(3) 16 divise $5^n - 1 - 4n$.

Exercice 7.
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $x + y = 187$ et $\text{PPCM}(x, y) = 30\text{PGCD}(x, y)$.

Exercice 8. [•]
Calculer le PGCD de 21560 et 27300. Écrire l'égalité de Bezout correspondante.

Exercice 9.
En utilisant les congruences, établir les propriétés suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(1) 5 divise $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$. [•]
(2) 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.
(3) 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$.

Exercice 10.
Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le nombre $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ est divisible par 3804.

Exercice 11.
(1) Calculer le PGCD de $(3^{123}-5)$ et de 25. [$\bullet$]
(2) Calculer le PGCD de $(2^{443}+7)$ et de 15.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES.

Exercice 12.
Résoudre dans $\mathbb{N}^2$: $\text{PGCD}(x,y)=12$ et $\text{PPCM}(x,y)=216$.

Exercice 13.
Calculer le PGCD de 560 et 133. Écrire l'égalité de Bezout correspondante.

Exercice 14.
Soient a un entier naturel non nul et p un nombre premier.
(1) Soit k un entier tel que $1\leq k\leq p-1$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.
(2) En déduire par récurrence sur a que p divise a^p-a.

Exercice 15.
(1) Montrer que si n est un entier impair, alors $n^2\equiv 1$ [8].
(2) Montrer que si n est un entier pair, alors $n^2\equiv 0$ [8], ou $n^2\equiv 4$ [8].
(3) Prouver que la somme $a^2+b^2+c^2$ des carrés des trois entiers impairs a, b et c et ne peut pas être le carré d'un entier.

Exercice 16.
Déterminer tous les couples d'entiers $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ vérifiant les équations suivantes.
(1) $xy=2x+3y$.
(2) $x^2-y^2-x+3y=30$.
(3) $2x^3+xy-7=0$.

Exercice 17. Contrôle continu année 2013-2014
(1) Quel est le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7 ?
(2) Montrer que pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7.
(3) Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7.

Pour tout entier naturel non nul n on pose $s_n=1+3+....+3^{n-1}$.

(4) Justifier l'égalité $s_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$
(5) Quelles sont les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles s_n est divisible par 7 ?

Exercice 18. Contrôle continu année 2014-2015
(1) Démontrer que 7^n+1 est divisible par 8 quand n est impair.
(2) Quel est le reste de la division euclidienne par 8 de 7^n+1 quand n est pair ?

Exercice 19. Contrôle continu année 2014-2015
Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $40^n\cdot n!$ divise $(5n)!$.