Université de Rouen
L2 SPS
Année 2015-2016

Mathématiques. Fiche n°3bis
Entraînement

Exercice 1. [décomposition en éléments simples] Sur le même modèle que les deux exercices précédents calculer les primitives des fonctions suivantes

$$\frac{x^2-x}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}, \qquad \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

Exercice 2. Calculer l'intégrale

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \cos^2 x dx$$

On peut éviter quelques calculs (mais pas tous) en écrivant que $\sin^4(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2\sin^2(2x)$. Ensuite en linéarisant et après calculs on trouve

$$I_3 = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 3. Reconnaître les fonctions suivantes comme dérivées de fonctions simples (intégrer de tête donc) (sauf erreur, la réponse devrait se trouver parmi l'un des quatre fonctions entre les accolades)

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}} \qquad \left\{2\ln\sqrt{2+\cos(x)};\quad -2(2+\cos(x))^{3/2};\quad -\sqrt{2+\cos(x)};\quad -2\sqrt{2+\cos(x)}\right\}$$

$$\frac{6\ln(x)}{x} \qquad \left\{(\ln(x))^2;\quad 3(\ln(x))^2;\quad (\ln(x^6));\quad (\ln(x))^6\right\}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \left\{\tan(x);\quad \frac{1}{\sin(x)};\quad \ln|\sin(x)|;\quad \ln|\cos(x)|\right\}$$

$$\frac{4x^2+4}{(x^3+3x+1)^2} \qquad \left\{\frac{-4}{3(x^3+3x+1)};\quad \frac{-2}{3(x^3+3x+1)};\quad \frac{-4}{(x^3+3x+1)};\quad \frac{-1}{3(x^3+3x+1)}\right\}$$

$$\frac{-4}{x(\ln(x))^3} \qquad \left\{\frac{1}{(\ln(x))^4};\quad \frac{2}{(\ln(x))^4};\quad \frac{1}{(\ln(x))^2};\quad \frac{2}{(\ln(x))^2}\right\}$$

$$12\cos^3(x)\sin(x) \qquad \left\{-\cos^{12}(x);\quad -\cos^4(x);\quad -3\cos^4(x);\quad 3\sin^4(x)\right\}$$

$$(1+\tan^2(x))\tan^2(x) \qquad \left\{\frac{1}{2}(1+\tan^2(x))^2;\quad \frac{1}{2}\tan^2(x);\quad \tan^3(x);\quad \frac{1}{3}\tan^3(x)\right\}$$

$$(2x+1)\sin(x^2+x) \qquad \left\{\frac{-1}{2}\cos((x^2+x)^2);\quad \sin^2(x^2+x);\quad -\cos(x^2+x);\quad \sin(x^2+x)\right\}$$

Exercice 4. [IPP] Calculer les primitives des fonctions données

$$(x^2+1)\exp(-x) \quad \{(-x^2-2x-3)\exp(-x)\}; \qquad x^2\sin(2x) \quad \{-\frac{x^2}{2}\cos(2x)+\frac{x}{2}\sin(2x)+\frac{\cos(2x)}{4}\};$$

$$\ln x \quad \{x\ln(x)-x\}; \qquad (\ln(x))^2 \quad \{x(\ln(x))^2-2(x\ln(x)-x)\}.$$

Pour la primitive de $\ln(x)$, on pourra écrire $\ln(x) = 1\times\ln(x)$, poser $u' = 1$, $v = \ln(x)$ et faire l'IPP (idem pour la dernière primitive à calculer).

Exercice 5. Calculer l'intégrale (par une IPP).

$$I = \int_0^{\pi/2} 16x\cos^4 x dx.$$

On commencera par écrire $cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$, puis on décomposera l'intégrale en deux parties ; une se calcule aisément, l'autre se calcule par une IPP. On trouve $I = \pi^2 - 4$.