Université de Rouen
L2 SPS
Année 2015-2016

Mathématiques. Fiche n°5
Matrices et élimination de Gauss

Exercice 1. Appliquer l'élimination de Gauss et la « remontée » pour résoudre

$$\begin{aligned} 2u-3v &= 3\\ 4u-5v+w &= 7\\ 2u-v-3w &= 5. \end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre le système (et donner les pivots)

$$\begin{aligned} 2u-v &= 0\\ -u+2v-w &= 0\\ -v+2w-z &= 0\\ -w+2z &= 5. \end{aligned}$$

Exercice 3. Appliquer l'élimination de Gauss au système

$$\begin{aligned} u+v+w &= -2\\ 3u+3v-w &= 6\\ u-v+w &= -1. \end{aligned}$$

On rappelle que si un zéro apparaît en position de pivot alors on échange la ligne concernée avec une ligne en dessous. Dans la 3ème ligne le coefficient de v est -1 : par quelle valeur doit remplacer ce -1 pour que l'élimination de Gauss échoue ?

Exercice 4. Trouver par élimination la solution du système

$$\begin{aligned} x-y &= 0\\ 3x+6y &= 18. \end{aligned}$$

Tracer sur un graphique les droites représentant le système. Ajouter sur ce graphique la droite correspondant à la seconde équation obtenue après élimination.

Exercice 5. Utiliser le procédé d'élimination de Gauss pour résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{aligned} u+v+w &= 6\\ u+2v+2w &= 11\\ 2u+3v-4w &= 3 \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} u+v+w &= 7\\ u+2v+2w &= 10\\ 2u+3v-4w &= 3. \end{aligned}$$

Exercice 6. Calculer les produits

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5\\ -2\\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. En travaillant sur les colonnes calculer les produits

$$\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 5 & 1\\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3\\ 6 & 6\\ 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Calculer les deux produits scalaires et la matrice produit

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 5\\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Calculer les produits AB et BA où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Prendre 3 matrices carrées de taille 2, notées A, B et C. Calculer $(AB)C$ et $A(BC)$ (ainsi on est persuadé que le produit matriciel est associatif !).

Exercice 11. Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Considérons la matrice $(A+B)^2$. Quelles sont celles parmi les matrices suivantes qui sont (de façon sûre) égales à $(A+B)^2$?

$$(B+A)^2, \quad A^2+2AB+B^2, \quad A(A+B)+B(A+B), \quad (A+B)(B+A), \quad A^2+AB+BA+B^2.$$

Exercice 12. Pour les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = AB = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

calculer A^2, A^3, A^4, B^2, B^3, B^4, C^2, C^3, C^4. Trouver ensuite les formules qui donnent A^n, B^n et C^n en fonction de n.

Exercice 13. Trouver les inverses des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

(a) Si A est inversible, expliquer pourquoi $AB = AC$ entraîne $B = C$.

(b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, trouver un exemple tel que $AB = AC$ avec $B \neq C$.

Exercice 15. Soient A et B deux matrices carrées. On suppose que l'inverse de A^2 est B. Montrer que l'inverse de A est AB. En déduire que si A^2 est inversible alors A l'est.

Exercice 16. (Gauss-Jordan) Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour inverser les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. Trouver une (ou plusieurs) matrices 2×2, autre(s) que I et $-I$, égale(s) à leur propre inverse ($A^2 = I$).

Exercice 18. Montrer que si l'élimination de Gauss échoue, comme par exemple pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

alors la matrice n'est pas inversible. Dans l'exemple on pourra regarder le fait que la troisième ligne de A^{-1} multipliée par A doit donner la troisième colonne de $A^{-1}A = I$. Dans le cas général on pourra chercher une interprétation en terme de systèmes linéaires.

Exercice 19. (un exemple 4×4**)** Calculer par la méthode de Gauss-Jordan l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$